

A FÍSICA DA TRAJETÓRIA DA BOLA DE VOLEIBOL

THE PHYSICS OF THE VOLLEYBALL BALL TRAJECTORY

LA FÍSICA DE LA TRAYECTORIA DEL BALÓN DE VOLEIBOL

Alyson Fernando de Barros¹
Roberto Aguilar de Souza Júnior²

Resumo

A trajetória da bola de vôlei pode ser estudada como um movimento oblíquo com diferentes níveis de sofisticação. Por isso, comparar-se-ão as equações de arrasto linear e arrasto quadrático com a equação de movimento sem atrito, no intuito de observar a relevância do atrito com o ar na posição final da trajetória. Utilizar-se-á o Microsoft Excel para fazer repetidas comparações, com diferentes combinações de fatores. Observou-se que a diferença entre as posições finais das equações de movimento com arrasto quadrático e sem arrasto ficam entre 15 e 30% dependendo da configuração do lançamento. A equação com arrasto linear não apresenta uma força de arrasto significativa para impedir o movimento. A função de frear a bola é desempenhada pelo arrasto quadrático, oriundo da densidade do fluido atravessado, apresentando um comportamento de amortecimento crítico.

Palavras-chave: física do vôlei; física do esporte; análise física.

Abstract

The trajectory of the volleyball ball can be studied as an oblique motion with different levels of sophistication. Therefore, the equations of linear drag and quadratic drag will be compared with the equation of motion without friction, in order to observe the relevance of friction with the air in the final position of the trajectory. Microsoft Excel will be used to make repeated comparisons, with different combinations of factors. It was observed that the difference between the final positions of the equations of motion with quadratic drag and without drag are between 15 and 30% depending on the launch configuration. The linear drag equation does not have a significant drag force to prevent the movement. The function of braking the ball is performed by the quadratic drag, arising from the density of the fluid traversed, presenting a critical damping behavior.

Keywords: volleyball physics; sport physics; physical analysis.

Resumen

La trayectoria del balón de voleibol puede ser estudiada como un movimiento oblicuo con diferentes niveles de sofisticación. Por ello, se van a comparar ecuaciones de arrastre lineal y arrastre cuadrático con la ecuación de movimiento sin fricción, con la intención de observar la relevancia de la fricción del aire en la posición final de la trayectoria. Se utilizará el Microsoft Excel para hacer repetidas comparaciones, con diferentes combinaciones de factores. Se pudo observar que la diferencia entre las posiciones finales de las ecuaciones de movimiento con arrastre cuadrático y sin arrastre quedan entre 15 y 30%, dependiendo de la configuración del lanzamiento. La ecuación con arrastre lineal no presenta una fuerza de arrastre significativa para impedir el movimiento. La función de frenar el balón la tiene el arrastre cuadrático, producido por la densidad del fluido atravesado, que presenta un comportamiento de amortiguación crítica.

Palabras-clave: física del voleibol; física del deporte; análisis físico.

1 Introdução

¹ Acadêmico do curso de Física no Centro Universitário Internacional UNINTER. E-mail: afb_2312@hotmail.com.

² Docente na área de Exatas no Centro Universitário Internacional UNINTER. E-mail: roberto.so@uninter.com.

A física como ciência que investiga as leis da natureza está intimamente relacionada com o esporte, desde a biomecânica que sustenta os jogadores até a transferência de energia entre o jogador e a bola; também explica a trajetória da bola e a interferência do meio sobre ela. Assim como as outras Ciências Exatas e Tecnologias (CET), é possível matematizar os seus fenômenos, para fazer previsões e relacionar grandezas físicas.

O escopo desse trabalho consiste na apresentação e comparação entre 3 equações de movimento, a equação simples (sem arrasto), a equação considerando o arrasto linear e a equação considerando o arrasto quadrático. As duas equações que levam em conta o atrito atribuem uma origem diferente ao fenômeno, mas ambas apresentam uma estrutura similar e com as mesmas dependências diretas e indiretas, como o impacto que a diferença de temperatura faz na trajetória. Dar-se-á ênfase à relevância das equações com atrito sobre a trajetória. Um objetivo secundário do estudo é apresentar formas de introduzir a disciplina Física a partir do gosto pelo esporte da maioria da população. Alguns pesquisadores desenvolvem projetos na área do esporte, com destaque para a professora Rosana Bulos Santiago, da UFRJ, que desenvolve projetos para o ensino da física através do esporte, tanto no ensino médio quanto no superior.

A física do esporte também pode ser aplicada no espaço profissional, na perspectiva de buscar jogadas ou técnicas mais eficientes como, por exemplo, o melhor ângulo possível para reduzir o tempo entre o saque e a queda da bola ou técnicas como a utilização do efeito Magnus, que visa alterar a aceleração da bola por meio da rotação.

2 Metodologia

Este trabalho foi desenvolvido por meio de uma abordagem qualitativa, com o objetivo de descrever e avaliar o impacto do arrasto na trajetória parabólica da bola de vôlei. Realizou-se pesquisa bibliográfica sobre o arrasto, desde a origem até as suas implicações físicas e matemáticas, culminando com a aplicação das equações de movimento com e sem arrasto. Utilizou-se o Microsoft Excel para facilitar o cálculo repetitivo na simulação de diversas situações, alternando-se as configurações de lançamento. Pôde-se assim comparar a relevância do arrasto, em paralelo com o ensino da física por meio do esporte.

O tema foi escolhido no intuito de trazer alternativas para o ensino da física, com a sua aplicação em temas populares como os esportes; a intenção foi mostrar o uso dessa ciência em outros contextos, despertar o interesse de alunos do ensino médio ou superior, gerar engajamento com a disciplina e garantir uma aprendizagem significativa.

Realizou-se uma busca de artigos e demais trabalhos no Google Acadêmico sobre os temas de didática, física no vôlei e física no esporte; pôde-se constatar que, embora exista um número significativo de produções acadêmicas sobre didática, há poucos trabalhos sobre física no esporte. Escolheu-se a plataforma Google Acadêmico, pois conta com uma grande demanda de produções científicas.

Os autores com maior destaque para o desenvolvimento desse trabalho são M. Goto *et al.* (2008), M. Duarte e E. Okuno (2012) e R. Santiago *et al.* (2013), por possuir um objetivo similar, a análise da física do esporte; embora seus trabalhos considerem esportes diferentes, compartilham conhecimentos em comum.

3 Coeficiente de Arrasto

3.1 Arrasto Linear

O coeficiente de arrasto linear, normalmente representado pela letra b , está associado com a viscosidade do fluido; em outras palavras, está associado à resistência ao escoamento e essa resistência varia conforme a temperatura. Portanto, no caso do vôlei, a temperatura do ar na quadra altera ligeiramente o coeficiente de arrasto. O coeficiente b pode ser escrito como $b = \eta D$, onde η é a viscosidade dinâmica e D o diâmetro. Existem algumas fórmulas para se calcular a viscosidade dinâmica, como $\eta = \frac{\tau}{\frac{dv}{dy}}$, onde τ é a tensão de cisalhamento e $\frac{dv}{dy}$ a aceleração que o fluido desenvolve. Posto que a viscosidade é a dificuldade de um líquido escoar após ser aplicada uma tensão de cisalhamento (tensão tangencial) sobre ele, notamos que a viscosidade e a aceleração são inversamente proporcionais $\therefore \uparrow \eta = \frac{\tau}{\downarrow \frac{dv}{dy}}$. Porém, existem outros cálculos mais interessantes para a análise, como a equação de Schutterland, $\eta = \frac{C + T^{\frac{3}{2}}}{T + S}$, que relaciona a viscosidade à temperatura, onde C e S são constantes do material analisado. A viscosidade é resultado da força de coesão entre as moléculas do fluido. Como a força de coesão nos gases é tão pequena que não consegue nem o manter unido, a viscosidade nos gases será relativamente baixa; conseqüentemente, a força de arrasto também. A força dada por $f(al) = bv = \eta Dv$, atribui um peso igual tanto para o coeficiente de arrasto linear (viscosidade e diâmetro) quanto para a velocidade, de maneira que aumentando a velocidade, a força de arrasto aumenta de forma proporcional. Portanto, o arrasto linear atribui à viscosidade do fluido a causa do arrasto, pois algo mais viscoso (moléculas mais unidas) traria uma maior dificuldade de locomoção ao objeto que atravessa o fluido.

3.2 Arrasto Quadrático

Representado pela letra c , o arrasto quadrático possui uma origem diferente do arrasto linear; está relacionado com a densidade do meio (ρ), pois para que um objeto se movimente dentro de um fluido é necessário que ele desloque as moléculas presentes no meio para assim poder ocupar aquele espaço. Logo, quanto mais denso ($\rho = \frac{m}{V}$), mais moléculas estarão concentradas em um determinado volume, de maneira que maior será a dificuldade de atravessar esse meio. Cada molécula possui uma inércia e a força de reação causada pela inércia seria a força de arrasto; portanto, a natureza desse coeficiente está relacionada com as colisões que ocorrem entre as moléculas do fluido e o objeto que está passando pelo material. O coeficiente de arrasto quadrático é dado por $c = \rho D^2$, onde ρ é a densidade do meio e D o diâmetro do objeto. Notamos que o diâmetro tem uma relevância maior do que a densidade, mas sabendo que a área de uma esfera é $A = 4\pi r^2$, que a área de contato com o fluido é metade da área total da bola e que $r = \frac{D}{2}$, então $A_c = 2\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{2}$. Vemos que a densidade (ρ) tem o mesmo peso da área A_c e não do diâmetro, logo, quanto maior a área de contato com o fluido e maior a densidade desse fluido, maior será o coeficiente de arrasto. E a força de arrasto quadrática é dada por $f(aq) = cv^2 = \rho D^2 v^2$, onde a velocidade exerce uma maior relevância no arrasto; quanto mais rápido, mais moléculas precisam ser empurradas em um determinado tempo, dificultando a travessia pelo meio.

Podemos calcular o impacto que a temperatura causa na força de arrasto. Para uma velocidade fixa de 10 m/s e uma temperatura de $T = 10^\circ\text{C}$, a densidade do ar é $\rho = 1,2466 \text{ kg/m}^3$ $\therefore f(aq) = cv^2 = \rho D^2 v^2 = 1,2466 \cdot 0,23^2 \cdot 10^2 = 6,595 \text{ N}$. Agora, considerando uma temperatura de 20°C , conseqüentemente $\rho = 1,1839 \text{ kg/m}^3$, temos que a força de arrasto fica $f(aq) = cv^2 = \rho D^2 v^2 = 1,1839 \cdot 0,23^2 \cdot 10^2 = 6,263 \text{ N}$. Uma diferença de 5%; pequena, mas não desprezível. Portanto, em uma partida de vôlei jogada em um ambiente mais frio, o jogador deverá compensar esse arrasto maior com força muscular.

3.3 Comparação entre os coeficientes de arrasto

Em um movimento real, tanto o arrasto linear quanto o arrasto quadrático estão presentes, dificultando o movimento. A força de arrasto pode ser representada como $\therefore f(a) = bv + cv^2$, divergindo apenas em grau de relevância. De modo geral, o arrasto linear é mais significativo para partículas pequenas, como a poeira ou gotículas, enquanto o arrasto quadrático é mais significativo para objetos maiores. Porém, pode haver casos em que ambos

tenham aproximadamente a mesma relevância, como no caso de uma gota de chuva, onde nenhum arrasto pode ser desconsiderado; podemos determinar a relevância de cada parcela ao fazer a divisão entre elas $\frac{f \text{ quadrático}}{f \text{ linear}} = \frac{cv^2}{bv} = \frac{\rho D^2 v}{2\eta Dv} = \frac{\rho Dv}{\eta} = R$, sendo R o coeficiente de Reynolds. Dessa forma, medimos o quanto uma parcela se sobrepõe a outra; no de caso $R > 1$ significa que a parcela quadrática é maior que a linear. Na grande maioria das situações do dia a dia $R \gg 1$, caso $R = 1$, ambos têm a mesma importância; logo, deverão ser considerados na equação, o que resulta em uma equação mais complexa. Não será possível desprezar nenhum arrasto na representação de um problema realista. Caso $R < 1$, o coeficiente linear será mais relevante. Com a expressão para o cálculo do número de Reynolds que obtivemos acima, podemos aplicar em uma situação real.

$$R = \frac{\rho Dv}{\eta} \quad (1)$$

Onde ρ é a densidade, η é a viscosidade e D é o diâmetro e v a velocidade. Para o nosso estudo, calcularemos o número de Reynolds de uma bola de vôlei, então:

$$R = \frac{1,205 * 0,23 * 5}{2.10^{-5}} = 69.287,5 \gg 1$$

Mesmo considerando uma velocidade modesta de $5m/s$, considerando que em uma partida de vôlei frequentemente a velocidade da bola ultrapassa os $30m/s$, claramente $R \gg 1$, portanto o arrasto quadrático é predominante nessa situação e podemos desconsiderar a parcela linear.

Outro fator que podemos destacar é a relevância da temperatura e da velocidade; em média, a cada 20° , a viscosidade se altera em torno de $5,5\%$, enquanto no mesmo intervalo de temperatura, a densidade do ar apresenta uma alteração de $6,5\%$. Além disso, o arrasto linear cresce proporcional à velocidade, enquanto o arrasto quadrático é proporcional ao quadrado da velocidade, o que implica uma maior variação na força de arrasto decorrente das configurações do sistema.

4 Equações de Movimento

Para descrever a trajetória apresentaremos 3 equações distintas para o movimento, com o intuito de compará-las e aplicá-las em simuladores, com diferentes níveis de precisão: a

equação de movimento simples, sem atrito, que normalmente é ensinada no ensino médio; a equação de movimento com arrasto linear, mais adequada para pequenas partículas; e a equação de movimento com arrasto quadrático, onde elas apresentam complexidades e resultados ligeiramente diferentes.

4.1 Equações de movimento MRU / MRUV

Ao analisarmos o movimento de projétil, notamos que a força-peso atua somente no eixo vertical; portanto, ao decompor as forças, teremos no eixo vertical um movimento de aceleração g enquanto no eixo horizontal o movimento será constante. A partir da definição de velocidade, que é a taxa de variação da posição pela taxa de variação do tempo $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, encontramos a equação horária da posição:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3)$$

$$v \cdot \Delta t = x - x_0 \quad (4)$$

Considerando $t_0 = 0$ ficamos com:

$$x = x_0 + vt \quad (5)$$

Para movimentos acelerados, podemos calcular a equação horária da velocidade de forma análoga, utilizando a definição de aceleração, taxa de variação da velocidade sobre a taxa de variação da posição:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (6)$$

$$at = v - v_0 \quad (7)$$

$$v = v_0 + at \quad (8)$$

Integrada à equação (4), obtemos a expressão que descreve um movimento acelerado, a equação horária da posição para o movimento retilíneo uniformemente variado

$$\frac{dy}{dt} = v_0 + at \quad (9)$$

$$\int dy = \int (v_0 + at)dt \quad (10)$$

$$y - y_0 = v_0t + \frac{at^2}{2} \quad (11)$$

Com essas equações podemos descrever o movimento de um projétil, porém nessa equação não consideramos o atrito, razão pela qual não é uma aproximação muito boa da realidade.

4.2 Equação do movimento para o arrasto linear

Com base em conhecimentos de mecânica newtoniana, podemos equacionar o sistema, onde a resistência do ar será dada pelo fator b , e proporcional à velocidade.

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = -b \frac{dr}{dt} - mg \quad (12)$$

Decompondo a equação nos eixos x e y temos

Em x :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} = 0 \quad (13)$$

Em y :

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + mg = 0 \quad (14)$$

Resolvendo a equação no eixo x :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} \quad (15)$$

$$\int \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{b}{m} \int \frac{dx}{dt} \quad (16)$$

$$\int \frac{dv_x}{v_x} = - \frac{b}{m} \int dt \quad (17)$$

Obtemos a equação horária da velocidade:

$$\ln v \frac{x}{v_{0x}} = - \frac{b}{m} \Delta t \quad (18)$$

Ou:

$$v_x(t) = v_{0x} e^{-\frac{b}{m} \Delta t} \quad (19)$$

Integrando a velocidade obtemos a posição em x:

$$x(t) = x_0 - \frac{m}{b} v_{0x} [e^{-\frac{b}{m} t} - 1] \quad (20)$$

Note-se o fator $\frac{m}{b}$, onde massa é proporcional à posição. A interpretação física desse termo nos diz que aumentando a massa aumentamos a posição, porque aumentamos o momento linear ($\vec{P} = m \cdot v$), que pode ser interpretado como o impacto entre a bola e as moléculas do ar, sem aumentar o diâmetro; em uma linguagem mais popular seria mais massa empurrando a mesma quantidade de moléculas, o que facilita a passagem pelo meio. Porém, existe o fator $e^{-\frac{b}{m} t}$ limitando o aumento indefinido da posição através do aumento de peso; na prática sabemos que, para sistemas sem resistência do ar, a velocidade de queda será indiferente da massa, pois ambas estão sob a mesma aceleração. Para sistemas com resistência do ar, atua o mesmo princípio mencionado acima, o momento linear que empurra mais facilmente as moléculas de ar, trazendo o peso mais rapidamente para baixo.

Pela equação de movimento utilizando o arrasto linear, podemos analisar o efeito que a variação de massa provoca na posição final. No vôlei, a bola deve pesar entre 0,26 e 0,28 kg; considerando uma velocidade de 36,5 m/s e um coeficiente de arrasto $b = 0,077$ e $t = 0,5$, para a primeira situação a posição final será $x = 16,96 m$. Já para o segundo caso $x = 17,05 m$, há uma variação de 0,53%. Essa pequena variação pode ser suficiente para lançar uma bola dentro ou fora da quadra. Uma variação de 0,02kg na massa provocou uma variação de 0,53% de variação da posição; considerando massas maiores, a variação na posição é ínfima. Utilizando a mesma configuração acima para variar a posição de 18,24m para 18,25m, 0,055% de aumento, é necessário aumentar a massa de 27kg para 114kg. Portanto, existe uma

massa cujo aumento quase não interfere na posição, mas essa massa depende da configuração empregada, mais especificamente do coeficiente de arrasto (b) e do tempo (t).

Agora resolvendo a equação no eixo y :

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{b}{m}v_y + g = 0 \quad (21)$$

$$\int \frac{dv_y}{v_y + \frac{mg}{b}} = -\frac{b}{m} dt \quad (22)$$

Resultando em:

$$\ln \frac{v_y + \frac{mg}{b}}{v_{0y} + \frac{mg}{b}} = -\frac{b}{m}t \quad (23)$$

Simplificando:

$$v_y(t) + \frac{mg}{b} = (v_{0y} + \frac{mg}{b})e^{-\frac{b}{m}t} \quad (24)$$

Integrando a expressão da velocidade, finalmente chegamos à equação horária da posição para o eixo y :

$$y(t) = y_0 - \frac{mg}{b}t - \frac{m}{b}(v_{0y} + \frac{mg}{b})[e^{-\frac{b}{m}t} - 1] \quad (25)$$

4.3 Equação de movimento – Arrasto quadrático

A segunda lei de Newton para o arrasto quadrático fica:

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = mg - cv^2 \quad (26)$$

Como fizemos anteriormente, iremos decompondo os componentes em parcelas verticais e horizontais

Em x :
$$m \frac{dv_x}{dt} = -cv^2 \quad (27)$$

Em y:
$$m \frac{dv_y}{dt} = mg - cv^2 \quad (28)$$

Resolvendo a equação no eixo horizontal, temos:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{m} v^2 \quad (29)$$

Separando as variáveis e integrando

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{c}{m} dt \quad (30)$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\int_0^t \frac{c}{m} dt \quad (31)$$

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = -\frac{c}{m} t \quad (32)$$

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{ct}{mv_0}} \quad (33)$$

Agora que temos a expressão da velocidade no eixo horizontal, podemos encontrar a equação horária da posição.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1 + \frac{ct}{mv_0}} \quad (34)$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{dt} = \int_0^t \frac{v_0}{1 + \frac{ct}{mv_0}} \quad (35)$$

Resultando em

$$x = x_0 + v_0 * \frac{m}{c} \ln\left(1 + \frac{ct}{mv_0}\right) \quad (36)$$

Agora analisando o movimento na vertical

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{cv^2}{m} \quad (37)$$

Sobre essa equação é interessante notar que, em algum momento, teremos um valor de v tal que $g = \frac{cv^2}{m}$; isso significa que não há mais aceleração no sistema. Esse v chamamos de velocidade terminal

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{c}} \quad (38)$$

Note que podemos manipular a equação (37) de forma que:

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{cv^2}{gm}\right) \quad (39)$$

E então podemos inserir a velocidade terminal da seguinte forma

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \left(\frac{v}{v_t}\right)^2\right) \quad (40)$$

Aqui usaremos uma simplificação ao considerar $v = 0$

$$\int_0^t g dt = \int_0^v \frac{dv}{1 - \left(\frac{v}{v_t}\right)^2} \quad (41)$$

Integrando o lado direito por frações parciais chegamos a:

$$gt = \frac{v_t}{2} \ln \left[\frac{1 + \frac{v}{v_t}}{1 - \frac{v}{v_t}} \right] \quad (42)$$

$$e^{\frac{2gt}{v_t}} = \frac{1 + \frac{v}{v_t}}{1 - \frac{v}{v_t}} \quad (43)$$

$$\frac{v}{v_t} = \frac{e^{\frac{2gt}{v_t}} - 1}{e^{\frac{2gt}{v_t}} + 1} \quad (44)$$

Podemos multiplicar o numerador e o denominador por $e^{-\frac{gt}{v_t}}$, encontrando:

$$v = v_t \frac{\frac{gt}{e^{v_t t} + e^{-\frac{gt}{v_t}}}}{\frac{gt}{e^{v_t t} + e^{-\frac{gt}{v_t}}}} \quad (45)$$

Resultando em:

$$v = v_t \tanh\left(\frac{gt}{v_t}\right) \quad (46)$$

E finalmente chegamos a:

$$\int \frac{dy}{dt} = \int v_t \tanh\left(\frac{gt}{v_t}\right) \quad (47)$$

$$\int_{y_0}^y dy = \int_0^t v_t \tanh\left(\frac{gt}{v_t}\right) dt \quad (48)$$

E a equação horária da posição é dada por:

$$y = y_0 + \frac{v_t^2}{g} \ln[\cosh(\frac{gt}{v_t})] \quad (49)$$

4.4 Comparação

Primeiramente analisaremos a interpretação física das equações, no intuito de compará-las e apontar semelhanças e diferenças.

Equação do movimento sem arrasto:

$$x = x_0 + v_{0x} t$$

Equação do movimento considerando o arrasto linear:

$$x(t) = x_0 - \frac{m}{b} v_{0x} [e^{-\frac{b}{m} t} - 1]$$

Equação do movimento considerando o arrasto quadrático:

$$x = x_0 + v_{0x} * \frac{m}{c} \ln\left(1 + \frac{t}{\frac{m}{c v_{0x}}}\right)$$

A primeira equação, embora simples, estaria absolutamente certa se não fosse a presença de atmosfera. Como o físico Brian Cox demonstrou — em 2014 quando visitou o Space Power Facility da NASA — comparando a queda de uma bola de boliche com penas, a queda de um objeto no vácuo independe da massa pois estão sujeitos à mesma aceleração. Analiticamente $F_r = P = m \cdot g = m \cdot a \therefore g = a$, logo se conclui que o termos $-\frac{m}{b} [e^{-\frac{b}{m}t} - 1]$ da equação do arrasto linear e o termo $\frac{m}{c} \ln(1 + \frac{t}{\frac{m}{cv_{0x}}})$ do arrasto quadrático são decorrentes do atrito entre o objeto — no caso a bola —, e o meio —no caso o ar —, incluindo 3 variáveis para o cálculo da posição. As explicações para esse arrasto fogem da mecânica dos sólidos e entram na mecânica dos fluidos, onde a força de coesão entre as partículas provoca tanto a viscosidade quanto a densidade. Outro termo importante é a razão entre massa e coeficiente de arrasto $(\frac{m}{b/c})$ onde $c = \rho D^2$ e $b = \eta D$. Ambas as equação o possuem, porém com ênfase diferente ao diâmetro ou área de contato; ambas as equações possuem uma expressão que limita a relevância da massa, que são $e^{-\frac{\eta D}{m}t} - 1$ pois, quanto maior a massa, mais próxima o primeiro termo chega de 1, e $\ln(1 + \frac{t}{\frac{m}{cv_{0x}}})$. Aqui vemos que quanto maior a massa, mais próximo de 1 fica o ln, portanto aproximando toda a expressão de 0. A forma de contornar isso é aumentando o diâmetro, que conseqüentemente também aumentaria a força de arrasto. Logo, existe uma configuração ótima onde a massa pode aumentar ao elevar-se o termo $\frac{m}{b/c}$, sem aumentar o termo de suavização. Porém, estamos analisando apenas as equações de movimento; no contexto de um esporte existem outros fatores que podem alterar significativamente a prática como, por exemplo, o coeficiente de amortecimento do material, ou a força muscular que conseguimos fazer. Portanto não será conveniente uma bola pesada — pois não teremos força suficiente para executar os movimentos —, ou uma bola dura que machuque a mão. A elaboração de uma configuração ótima para maximizar a distância percorrida se torna complicada. Velocidade e tempo são as grandezas em que as 3 equações atribuem uma proporcionalidade direta ou indireta; a velocidade em todas as equações multiplica o resto da expressão, embora atribuindo importâncias diferentes, pois para a equação sem arrasto e com o arrasto linear a dependência da velocidade é linear, enquanto na última equação a dependência é quadrática. Já o tempo tem uma proporcionalidade indireta como na expressão $[e^{-\frac{b}{m}t} - 1]$, pois quanto maior o tempo, maior a diferença entre a exponencial e o número -1, ou $\ln(1 +$

$\frac{t}{\frac{m}{cv_0x}}$). Quanto maior o tempo, maior será o valor do ln, portanto, embora muito diferentes, as 3 equações apresentam características similares, com dependências similares, mesmo atribuindo importâncias diferentes para a velocidade e diâmetro. Portanto, com o aumento dessas grandezas, é esperado um arrasto muito maior na equação do movimento quadrático do que nas outras duas, que devem apresentar um comportamento mais próximo entre si.

Para comparar as 3 equações e seus resultados, usaremos o Microsoft Excel, que nos possibilita obter os resultados de forma mais rápida e confiável, principalmente quando se quer testar várias situações. Na célula A temos a equação que utilizaremos; das células B até H colocamos as nossas variáveis e por último nas células I calculamos as expressões da coluna A utilizando as variáveis das células B a H e obtemos o valor da posição. Entre as linhas 15 e 18 está a comparação percentual entre as equações de movimento.

Figura 1: Apresentação da planilha
EQUAÇÃO DO MOVIMENTO – SIMPLES

	X0 Y0 (m)	V0 x y (m/s)	t (s)					
EQUAÇÃO DO MOVIMENTO – SIMPLES								
X = X0+V0x * t	0	0	0					0,00
Y = Y0 +V0y*t + (g*t)/2	0	0	0					0
EQUAÇÃO DO MOVIMENTO – ARRASTO LINEAR								
X = X0-(m/b)*V0x*[e^(-bt/m)-1]	0	0	0	1	1	1	1	0,00
Y = Y0 - (mgt)/b - (m/b)*(Voy+(mg)/b)*[e^(-bt/m)-1]	0	0	0	1	1	1	0	0,00
EQUAÇÃO DO MOVIMENTO – ARRASTO QUADRÁTICO								
X = X0 +V0x*(m/c)*ln(1+t/(m/c*V0x))	0	0	0	1	1	1	1,000	0,00
Y = Y0 + (m / c)*ln[cosh(gt/sqrt(mg/c))]	0	0	0	1	1	0	0	0,00
RESULTADO ESPERADO E ERRO PERCENTUAL								
S/ ARRASTO	S/ ARRASTO	ARRASTO LINEAR	ARRASTO QUADRÁTICO					
ARRASTO LINEAR	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!					
ARRASTO QUADRÁTICO	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!					

Fonte: Elaborada pelo próprio autor (2020).

Agora estabeleceremos valores para que possamos comparar os resultados; partimos de $X_0 = 0$ e escolheremos aleatoriamente os valores para a velocidade e o ângulo de lançamento como: $V_0 = 20m/s$ e $\theta = 30$. Encaixaremos valores próximos à realidade de uma partida de vôlei, como $t = 0,8 m = 0,26, D = 0,22$ e a viscosidade e a densidade do ar a 20° sendo $\pm 0,00002$ e $1,205$ respectivamente.

Figura 2: Imagem do simulador Vascak

EQUAÇÃO DO MOVIMENTO – SIMPLES								
	X0 Y0 (m)	V0 x y (m/s)	t (s)					
$X = X0 + V0x \cdot t$	0	17,32	0,8					13,86
$Y = Y0 + V0y \cdot t + (g \cdot t^2) / 2$	0	0	0					0
EQUAÇÃO DO MOVIMENTO – ARRASTO LINEAR								
	X0 Y0 (m)	V0 x y (m/s)	t (s)	m (Kg)	b	D	η	
$X = X0 - (m/b) \cdot V0x \cdot [e^{-(bt/m)} - 1]$	0	17,32	0,8	0,26	0,0000044	0,22	0,00002	13,85
$Y = Y0 - (mgt)/b - (m/b) \cdot (V0y + (mg)/b) \cdot [e^{-(bt/m)} - 1]$	0	0	0	1	1	1	0	0,00
EQUAÇÃO DO MOVIMENTO – ARRASTO QUADRÁTICO								
	X0 Y0 (m)	V0 x y (m/s)	t (s)	m (Kg)	c	D	ρ	
$X = X0 + V0x \cdot (m/c) \cdot \ln(1 + t/(m/c \cdot V0x))$	0	17,32	0,8	0,26	0,2651	0,22	1,205	10,13
$Y = Y0 + (m / c) \cdot \ln[\cosh(gt/\sqrt{mg/c})]$	0	0	0	1	1	0	0	0,00
RESULTADO ESPERADO E ERRO PERCENTUAL								
	S/ ARRASTO		ARRASTO LINEAR					
ARRASTO LINEAR	0,01%		-					
ARRASTO QUADRÁTICO	26,88%		26,87%					

Fonte: Elaborada pelo próprio autor (2020).

Nesse primeiro caso, observamos uma diferença de 0,01% entre as equações de movimento sem arrasto e com arrasto quadrático. Esse valor já era esperado, pois em situações com o número de Reynolds > 1 , para o caso da bola de vôlei, $R = 69.287,5 \gg 1$. Portanto, é seguro desprezar a resistência do ar proporcionada pela viscosidade do fluido, já que apresenta uma diferença pequena respeito à situação sem arrasto; mudando a configuração para $t = 0,7s$, a diferença na posição final é de apenas $0,001m$. Uma diferença de milímetro não é relevante na maioria dos esportes, incluindo o vôlei. Avaliando a diferença entre a posição da primeira equação e da terceira, há uma diferença de quase 27% com $3,73m$, ou aproximadamente 21% da quadra de vôlei. O resultado do arrasto nessa situação está longe da situação ideal e um pouco mais próxima de uma situação real, pois não está sendo considerada a rugosidade da bola, nem o efeito Magnus causado pela sua rotação, frequentemente utilizado no esporte para alterar a trajetória da bola. Mas, em geral, essa última equação é uma boa aproximação para objetos com alta simetria, como esferas.

As equações considerando o arrasto têm uma forte dependência do diâmetro, pois quanto maior ele for, maior será a área de contato com o fluido. O diâmetro, assim como a massa, também possui um valor limite; ao ultrapassar esse valor, aumentar o diâmetro não trará grandes diferenças de deslocamento. Na prática, o diâmetro e a massa estão relacionados pela densidade $\rho = \frac{m}{V}$; sendo o diâmetro relacionado com o volume, então na prática diâmetro e massa seriam alterados juntos, mantendo uma proporção na equação.

Figura 3: Comparação diâmetro

EQUAÇÃO DO MOVIMENTO – SIMPLES								
	X0 Y0 (m)	V0 x y (m/s)	t (s)					
X = X0+V0x * t	0	17,32	1					17,320
Y = Y0 +V0y*t + (g*t)/2	0	0	0					0
EQUAÇÃO DO MOVIMENTO – ARRASTO LINEAR								
	X0 Y0 (m)	V0 x y (m/s)	t (s)	m (Kg)	b	D	η	
X = X0-(m/b)*V0x*[e^(-bt/m)-1]	0	17,32	1	1	2E-10	0,00001	0,00002	17,318
Y = Y0 - (mgt)/b - (m/b)*(Voy+(mg)/b)*[e^(-bt/m)-1]	0	0	0	1	1	1	0	0,00
EQUAÇÃO DO MOVIMENTO – ARRASTO QUADRÁTICO								
	X0 Y0 (m)	V0 x y (m/s)	t (s)	m (Kg)	c	D	p	
X = X0 +V0x*(m/c)*ln(1+ti/(m/c*V0x))	0	17,32	1	1	0,00001205	0,00001	1,205	17,320
Y = Y0 + (m / c)*ln[cosh(gt/sqrt(mg/c))]	0	0	0	1	1	0	0	0,00
RESULTADO ESPERADO E ERRO PERCENTUAL								
	S/ ARRASTO		ARRASTO LINEAR					
ARRASTO LINEAR	0,01%		-					
ARRASTO QUADRÁTICO	0,00%		0,01%					

Fonte: Elaborada pelo próprio autor (2020).

Alterando o diâmetro, notamos que a relevância das equações é alterada; a equação de arrasto linear apresenta uma maior variação na posição final, enquanto a equação de movimento do arrasto quadrático tem a mesma posição da equação sem arrasto. Porém, essa a diferença na posição foi de apenas 2 mm; alterando-se a configuração da equação, também não se observou uma grande variação em relação à equação sem arrasto. Pode-se concluir que ela é válida apenas para distâncias pequenas; embora se tenha observado que, para tempos grandes, essa diferença de posição aumente, não é algo significativo, para:

- t=10 → E=0,01%
- t=50 → E=0,02%
- t=100 → E=0,03%
- t=200 → E=0,05%
- t=500 → E=0,11%
- t=1000 → E=0,21%

Logo, a equação do arrasto linear é pouco útil, pois chega a resultados muito similares à equação do movimento que despreza o atrito; apresenta maior ou menor divergência ao variar-se as grandezas físicas, mas dificilmente passa os 0,05% de erro percentual, a não ser em casos extremos. Para $m \gg D$, todas as equações convergem, aproximando-se da equação sem arrasto. Para a situação oposta $D \gg m$, a equação do arrasto quadrático nos dá uma posição muito pequena, matematicamente. Isso é justificável pelo logaritmo natural apresentado na equação da posição. Na prática, seria como se jogássemos uma grande bola de isopor para frente. Intuitivamente sabemos que ela não irá muito longe; por possuir uma grande área, irá colidir com grande número de moléculas presentes no ar, mas ela não tem momento suficiente para empurrar essas moléculas, pois sua massa é pequena. Para aumentar a distância percorrida antes

de cair ao solo, é necessário aumentar a velocidade, aumentando assim o momento $\vec{P} = m \cdot \vec{v}$; na equação horária da posição, a velocidade está multiplicando o resto da expressão, garantindo que o aumento de velocidade implique no aumento da posição.

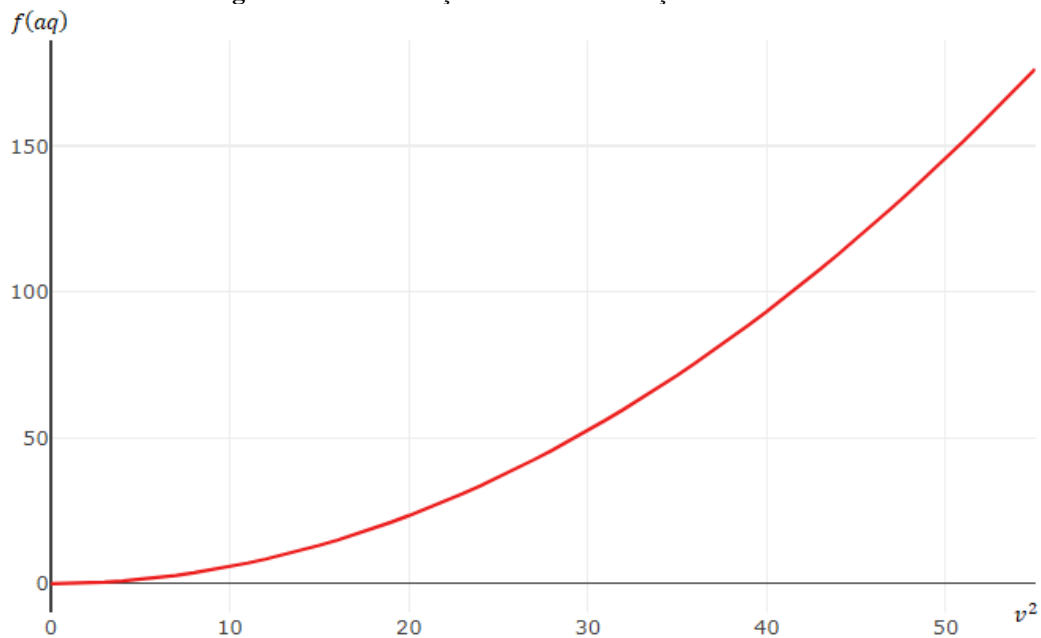
Figura 4: D >> m

EQUAÇÃO DO MOVIMENTO – SIMPLES								
	X0 Y0 (m)	V0 x y (m/s)	t (s)					
X = X0 + V0x * t	0	17,32	1					17,320
Y = Y0 + V0y*t + (g*t)/2	0	0	0					0
EQUAÇÃO DO MOVIMENTO – ARRASTO LINEAR								
	X0 Y0 (m)	V0 x y (m/s)	t (s)	m (Kg)	b	D	η	
X = X0 - (m/b)*V0x*[e^(-bt/m)-1]	0	17,32	1	0,005	0,00000396	0,22	0,000018	17,311
Y = Y0 - (mgt)/b - (m/b)*(Voy+(mg/b))*[e^(-bt/m)-1]	0	0	0	1	1	1	0	0,00
EQUAÇÃO DO MOVIMENTO – ARRASTO QUADRÁTICO								
	X0 Y0 (m)	V0 x y (m/s)	t (s)	m (Kg)	c	D	p	
X = X0 + V0x*(m/c)*ln(1+t/(m/c*V0x))	0	17,32	1	0,005	0,2651	0,22	1,205	1,303
Y = Y0 + (m / c)*ln[cosh(gt/sqrt(mg/c))]	0	0	0	1	1	0	0	0,00
RESULTADO ESPERADO E ERRO PERCENTUAL								
	S/ ARRASTO		ARRASTO LINEAR					
ARRASTO LINEAR	0,05%		-					
ARRASTO QUADRÁTICO	1229,04%		1228,37%					

Fonte: Elaborada pelo próprio autor (2020).

Para podermos mensurar o efeito do atrito em um jogo de vôlei, devemos comparar um saque real com as previsões. Atualmente, o saque mais forte do mundo é de $134 \frac{km}{h}$, aproximadamente $37 \frac{m}{s}$, levando pouco menos de 0,4 s para atingir o solo. Porém, ao inserir essa velocidade e tempo nas equações de movimento, notamos que a distância esperada seria de somente 12,41 m. Essa divergência se deve ao fato de que a velocidade considerada no jogo é a velocidade média percorrida pela bola durante os aproximados 17 m de quadra (como normalmente os jogadores em saques forçados, ao pular, avançam cerca de 1 m dentro da quadra, restam 17 m para se percorrer até o final da quadra). Para que a bola alcance o final da quadra em 0,4 s, a velocidade inicial deve ser de aproximadamente 50m/s. Sendo o arrasto quadrático dado por $f(aq) = cv^2 = \rho D^2 v^2$, vemos que nos primeiros instantes o movimento sofrerá uma redução brusca de velocidade, devido ao forte arrasto produzido por essa velocidade. Calculando esse arrasto para o instante 0, logo após a bola tocar a mão, temos: $f(aq) = \rho D^2 v^2 = 1,205 * 0,22^2 50^2 = 145,8 N$. Então, embora a velocidade inicial saia extremamente elevada, ela é rapidamente amortecida; supondo uma velocidade final de 20 m/s, a força de arrasto atuante sobre ela seria de $f(aq) = \rho D^2 v^2 = 1,205 * 0,22^2 20^2 = 23,33 N$, 84% mais fraca do que o arrasto inicial.

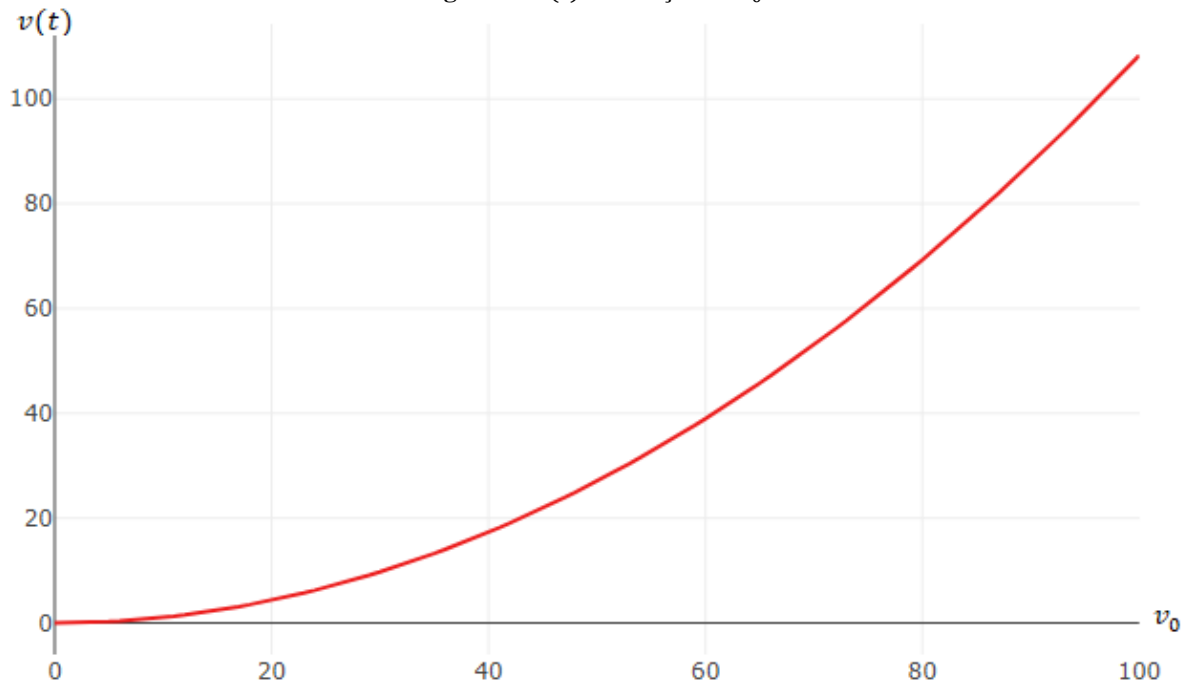
Figura 5: Gráfico força de arrasto em função da velocidade



Fonte: Elaborada pelo próprio autor (2021).

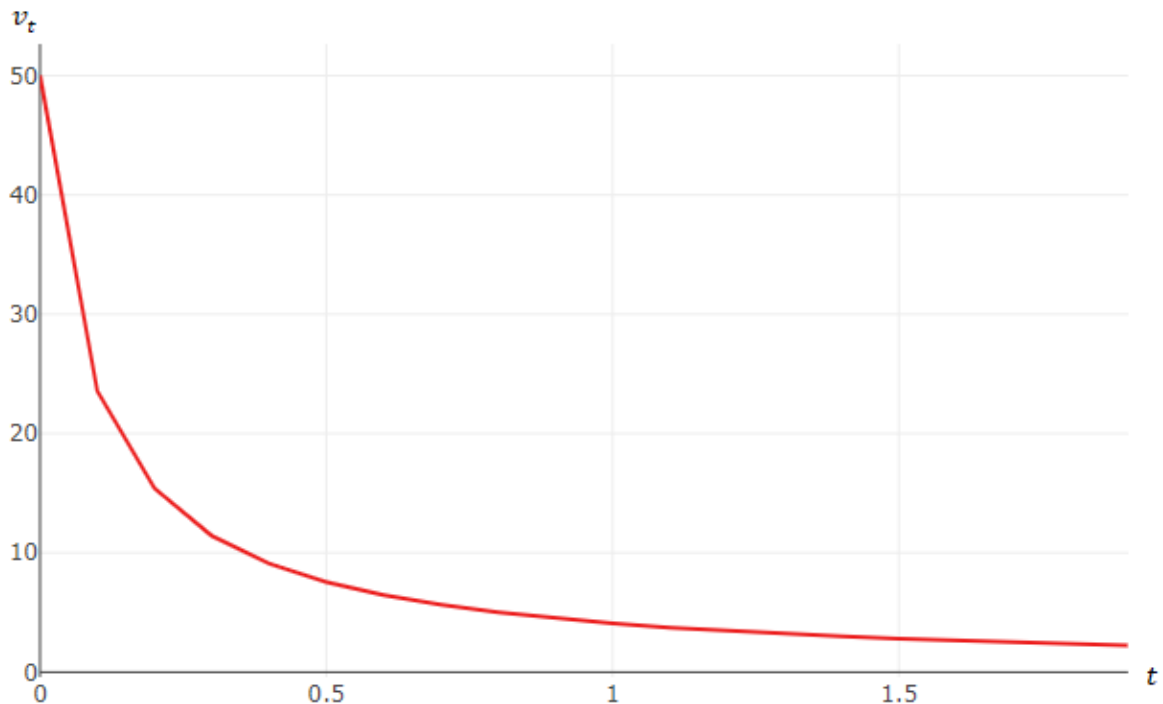
O gráfico da força de arrasto em função da velocidade ao quadrado apresenta um comportamento parabólico devido ao fato quadrático. O principal ponto do gráfico é a implicação que o aumento da velocidade causa na força de arrasto, pois os jogadores buscam aumentar a velocidade no saque, para diminuir o tempo de reação do adversário. Porém, enquanto a velocidade aumenta de forma linear, a força de arrasto aumenta de forma quadrática, dificultando consideravelmente o seu esforço em aumentar a velocidade média. No intervalo entre 30 e 40 m/s, vemos um aumento de 40.82 N na força de arrasto e no intervalo entre 40 e 50 m/s um aumento de 52.49 N na $f(aq)$. Portanto, aumentos de 10 m/s estão causando um aumento de arrasto muito superior ao aumento de velocidade, de maneira que qualquer aumento na velocidade média implica em um aumento considerável na velocidade inicial, pois estão sendo prejudicados pelo arrasto. A partir da equação horária da $v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{t}{\frac{m}{cv_0}}}$ podemos analisar o comportamento da velocidade em função do aumento de v_0 ou de t .

Figura 6: $v(t)$ em função de v_0



Fonte: Elaborada pelo próprio autor (2021).

Para um tempo fixo de $0,4\text{ s}$, densidade do ar a 20° , de $1,205\text{ kg/m}^3$, massa da bola de $0,26\text{ kg}$ e diâmetro de $0,22\text{ m}$, podemos ver que, aumentando v_0 , também há um aumento parabólico de v_t , porém muito menos acentuado que o esperado para uma situação sem arrasto, onde se esperava um aumento linear. A curva de aumento está sendo suavizada pelo arrasto, apresentando um coeficiente angular de $\alpha = 0,0108$, portanto, com inclinações suaves. Se aproxima mais a uma reta, muito inferior ao coeficiente angular do gráfico de $f(aq) \times v^2$ de $\alpha = 0,0583$, onde a curva era ligeiramente mais acentuada.

Figura 7: Decaimento da velocidade em função do tempo

Fonte: Elaborada pelo próprio autor (2021).

Para a massa, densidade e diâmetro já estipulados anteriormente, vemos que a velocidade cai com o inverso do quadrado com o tempo; na primeira parte do gráfico o coeficiente angular é $\alpha = -264,5$, que representa uma queda brusca da velocidade conforme passa o tempo. Isso se deve ao forte arrasto para velocidades altas. Em um segundo período avaliado, de $t = 0,1$ a $t = 0,2$, coeficiente angular de $\alpha = -81,4$ e de $t = 0,2$ a $t = 0,3$, seu coeficiente angular é $\alpha = -39,6$. Logo, o movimento se inicia com uma redução brusca e, rapidamente, conforme a velocidade decai, a curva é suavizada — comportamento característico de um amortecimento crítico.

5 Considerações finais

A pesquisa realizada tinha como objetivo analisar os efeitos do arrasto na trajetória da bola de vôlei; durante o desenvolvimento observou-se a relação entre mais de uma área da física, como a cinemática e a hidrostática, pois a força de coesão entre as moléculas presentes no ar provoca a viscosidade e a densidade do fluido, fatores que dificultam o movimento. As duas equações de movimento que consideram o arrasto divergem na origem do fenômeno; a primeira equação associa a força de atrito à viscosidade do meio, enquanto a segunda associa o arrasto à densidade do meio pois, quanto mais denso, maior o número de moléculas que a bola terá que empurrar para se deslocar. Embora durante o movimento de um objeto atuem tanto a

força de arrasto linear quanto a de arrasto quadrático, elas possuem importâncias diferentes. Observou-se que a força de arrasto linear apresenta uma resistência pouco significativa no trajeto de uma bola de vôlei, chegando a resultados similares aos da equação sem arrasto para o cálculo da posição. Indica-se o arrasto quadrático como opção mais adequada para o cálculo da posição; a divergência entre a equação que despreza o atrito e a equação com o arrasto quadrático fica entre 15 e 30%, dependendo das configurações do sistema. As equações abordadas desconsideram alguns fatores como rugosidade do material, velocidade de rotação da bola e geometria. Embora funcione bem para objetos de alta simetria, como a esfera, essas equações são aproximações. Será interessante estudar os fatores não considerados nesse trabalho.

Referências

CARNEIRO de PAULA, Gilma. A importância da aprendizagem significativa. *In*: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense**: produção didático-pedagógica, 2008. Curitiba: SEED/PR, 2011. v.2. (Cadernos PDE). Disponível em: www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=20. Acesso em: 20 jan. 2021. ISBN 978-85-8015-040-7.

DUARTE, M.; OKUNO, E. **Física do futebol**: mecânica. 1. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2012. 144 p.

GOTO, M.; FIORI, A.; OLIVEIRA, A. F. de; ROSTIROLLA, B.; MARCUCCI C.; ISHIKAWA, M. S. Física e esporte em jogo de badminton. 2008. **Academia.edu**. Disponível em: https://www.academia.edu/21193292/F%C3%ADsica_e_Esporte_em_Jogo_de_Badminton. Acesso em: 20 jan. 2021.

NETO, OP.; MAGINI, M.; SABA, M. M. F. Análise cinemática de um movimento de Kung-Fu: a importância de uma apropriada interpretação física para dados obtidos através de câmeras rápidas. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 28, p. 235-239, 2006.

RODRIGUES, L. R.; REZENDE, F.N.; DI AGOSTINI, G. G.; GONÇALVES, A. Comparação entre três diferentes métodos de treinamento para aprimoramento do salto vertical em jogadoras de voleibol. **EFDeportes.com**, Buenos Aires, v. 12, n. 118, mar. 2008.

SANTIAGO, ROSANA B.; BULHOSA, V.; NASCIMENTO, A.; COSTA DA SILVA, C. J. C. Cooperação entre ciência e esporte em prol da inovação no ensino num prévestibular comunitário. **Revista Práxis** (online), Volta Redonda – RJ, v. 5, p. 131-135, 2013.

SANTIAGO, ROSANA B. Interdisciplinaridade e contextualização da física através do esporte. **Enseñanza de las Ciencias**, Vigo, Espanha, v. extra, p. 578-582, 2009.